ÉCOLE NAVALE

Deuxième composition de Mathématiques

Concours 1988

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Dans tout le problème, n désigne un entier égal à 2 ou à 3.

Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est représenté par ses coordonnées dans la base canonique : $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}$

Si P est une partie de $\mathbb{R}^n$, $|P|$ désigne :

- La surface de P si $n = 2$ et $P \subset \mathbb{R}^2$:
- Le volume de P si $n = 3$ et $P \subset \mathbb{R}^3$.

Pour $a \in \mathbb{R}^n$ on note $a + P$ le translaté de P par a, c'est-à-dire :

$$a + P = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \exists p \in P \ / \ x = a + p\}$$

Dans tout le problème Γ désigne un sous groupe additif de $\mathbb{Z}^n$ tel que $\mathbb{R}.\Gamma = \mathbb{R}^n$ (*)

$$[\text{ ie : } \forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists (t, \gamma) \in \mathbb{R} \times \Gamma \ / \ x = t\gamma \ ]$$

et on pose :

$$\Gamma^* = \{a = (a_i)_{i=1,\dots,n} \in \Gamma \text{ tels que } \exists i = 1,\dots,n \ / \ a_i \neq 0\}$$

On appelle <u>domaine fondamental de $\mathbb{R}^n$ relativement à Γ,</u> et on note D_Γ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que ses translatés par les vecteurs de Γ constituent une partition de $\mathbb{R}^n$.

$$[\text{ ie } \mathbb{R}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\gamma + D_\Gamma) \quad \text{et} \quad (\gamma + D_\Gamma) \cap (\gamma' + D_\Gamma) = \emptyset \quad \text{si} \quad \gamma \neq \gamma' \ ]$$

On notera que l'hypothèse $\mathbb{R}.\Gamma = \mathbb{R}^n$ implique : $|D_\Gamma| < +\infty$.

On rappelle qu'un entier i est congru à l'entier j modulo l'entier k si $i - j$ est multiple de k. On note $i \equiv j\ (k)$.

Soit p un nombre premier. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ des congruences modulo p.

On rappelle que $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ est un corps.

Soit $u \in \mathbb{Z}$: on dit que u est d'ordre r dans $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ si :

$$r = \inf \{s \in \mathbb{N}^* \ / \ u^s \equiv 1\ (p)\}$$

On rappelle que : – quel que soit $u \in \mathbb{Z}, u \neq 0$, on a : $u^{p-1} \equiv 1\ (p)$
– quel que soit r diviseur de $p - 1$ il existe $u \in \mathbb{Z}$ d'ordre r dans $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$.

PARTIE I

1. – Déterminer quels sont les domaines fondamentaux D_Γ et calculer $|D_\Gamma|$ dans les 4 cas suivants :

   a. $n = 2$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^2$.

   b. $n = 3$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^3$.

   c. $n = 2$: on fixe $u \in \mathbb{Z}^*$ et p un nombre premier différent de 1 : on définit Γ par :

   $$\Gamma = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ a_1 \equiv u\, a_2\ (p)\}$$

   d. $n = 3$: on fixe $(u, v) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et (p, q) deux nombres premiers différents de 1 : on définit Γ par :

   $$\Gamma = \left\{ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3 \ / \ \begin{matrix} a_2 \equiv u\, a_1\ (p) \\ a_3 \equiv v\, a_1\ (q). \end{matrix} \right\}$$

   On revient au cas général et on fixe un domaine fondamental D_Γ de $\mathbb{R}^n$ relativement à Γ.

(*) Ainsi défini Γ n'existe pas ...

TSVP

2. — Soit P une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que : $|P| > |D_\Gamma|$.

En décomposant P suivant la partition de $\mathbb{R}^n$ définie par D_Γ . c'est-à-dire en écrivant :

$$P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} |P \cap (\gamma + D_\Gamma)|$$

montrer qu'il existe deux éléments distincts a et b dans Γ tels que :

$$(a + P) \cap (b + P) \neq \emptyset$$

En déduire qu'il existe deux éléments x et y dans P tels que $x - y$ appartienne à Γ^*.

3. — Soit U un ouvert convexe, symétrique par rapport à l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que : $|U| > 2^n |D_\Gamma|$.

En définissant $P = \frac{1}{2} U = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ 2x \in U\}$ et en appliquant 2., montrer que U contient au moins un élément de Γ^*.

4. — Montrer que si l'on supprime l'une des 3 hypothèses suivantes :

a. U symétrique autour de l'origine ;

b. U convexe ;

c. $|U| > 2^n |D_\Gamma|$.

le résultat de la question 3. ne subsiste pas.

5. — Soit U un ouvert convexe symétrique autour de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $|U| = +\infty$.
Montrer que $U \cap \Gamma^*$ est infini (on pourra raisonner par l'absurde).

PARTIE II

Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier fixé, différent de 1.

1. — Montrer que -1 est le seul élément d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. — Dans cette question, on suppose que p est congru à 1 modulo 4.

a. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$, d'ordre 4 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b. Déduire de 1. que $u^2 + 1 \equiv 0 \ (p)$.

c. Soient $\begin{cases} \Gamma = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ a_1 \equiv u a_2 \ (p)\} \\ U_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1^2 + x_2^2 < r\} \end{cases}$

Montrer que si $r > 2\sqrt{\frac{p}{\pi}}$ U_r contient au moins un point de Γ^*.

d. En déduire qu'il existe un couple non nul $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 < 2p \\ a_1 \equiv u a_2 \ (p) \end{cases}$

3. — De la question 2., conclure que tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est la somme de deux carrés.

PARTIE III

Dans cette partie, on suppose $n = 3$.

1. — Soit φ une fonction continument dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère la surface réglée (S_φ) d'équation :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) + z \cos t \\ y = \sin t + z \varphi(t) \end{cases}$$

Déterminer φ pour que (S_φ) soit une surface développable.

2. — Calculez le volume du solide limité par les deux plans d'équation $z = a$ et $z = b$ ($(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ étant fixés) et par (S_φ).

3. — Pour quelles valeurs de a et b, le solide précédent contient-il un point à coordonnées dans $\mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ comme point intérieur ?

---==oOOo==---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail